

Code No. **35-NS**

Total No. of Questions : 38]

[Total No. of Printed Pages : 16

July, 2006

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

(New Syllabus)

Time : 3 Hours]

[Max. Marks : 90

(Kannada Version)

- ಸೂಚನೆ: i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C** ಮತ್ತು **D** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ - A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1. 3^{12} ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕ ಸ್ಥಾನ (ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನ)ದ ಅಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 3x-5 \end{bmatrix}$ ಮತ್ತು $B = A'$ ಆದಾಗ, x ನ

ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

3. Z ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ * ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯು $a * b = a + b + 5$ ಆದಾಗ, ಅದರ ಏಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ ಈ ಸದಿಶ ಪರಿಮಾಣದ ದಿಶಾ ಕೊಸೈನ್‌ಗಳನ್ನು (Direction cosines) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $x^2 + y^2 + 4x - 7 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $y^2 = 8 kx$ ಎಂಬ ಪರವಲಯದಲ್ಲಿ ಲಂಬ ನಾಭಿಯ ಉದ್ದ 4 ಆದರೆ, k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $\sin \left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \right]$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ದ ಕೋನಾಂಕವನ್ನು (Amplitude) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. $y = x^5 \cdot 5^x$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. $\int_0^1 (3x-1)^3 dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 2 = 20

11. $(c, a) = 1$ ಮತ್ತು c/ab ಆದಾಗ, c/b ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $5x + 3y = 1$

$$3x + 5y = -9$$

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮೇಣ ನಿಯಮದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

13. $(G, *)$ ಸಮುದಾಯದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}, \forall a, b \in G \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

14. $\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $2\hat{i} + 3\hat{k}$ ಎಂಬ ಸದಿಶಗಳು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ

ಚತುರ್ಭುಜ ಘನಾಕೃತಿಯ ಏಕ ಬಿಂದು ಸಂಪಾತ ಬಾಹುಗಳು ಆದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $(6, 1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವುಳ್ಳ ಮತ್ತು $5x + 12y - 3 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ

ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದ "ನಾಭಿ ಲಂಬ"ದ ಉದ್ದವನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{4}$ ಆದಾಗ, $x + y + xy = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. ω ಎಂಬ 1 ರ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಘನಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$(1 - \omega + \omega^2)^5 + (1 + \omega - \omega^2)^5 = 32 \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

19. $y = \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. $y^2 = 4ax$ ಪರವಲಯದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಭುಜದ (Abscissa) ಎರಡರಷ್ಟು ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21. ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 16. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಕನಿಷ್ಠವಾದಾಗ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $\int \sin \sqrt{x} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

23. 252 ಮತ್ತು 595 ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. (G.C.D.) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು $252a + 595b$ (a ಮತ್ತು b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ ಹಾಗೂ ಈ ನಿರೂಪಣೆ ಏಕಮೇವವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 5

24. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, A ದ ಸಂಗತಕೋಶ ($Adj A$) ವನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ಆದರೆ, ಕೇಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$A^2 - 4A + 3I = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

25. $G = \{ \cos \theta + i \sin \theta \mid \theta \text{ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ} \}$ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು

ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಮುದಾಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

26. a) $[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಸೈನ್ (sine) ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 5 = 10$

27. a) (x_1, y_1) ಹೊರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $2x^2 + 2y^2 - 6x + y + \lambda = 0$ ಗಳು ಲಂಬ ಭೇದಕ (Orthogonal) ವೃತ್ತಗಳಾದರೆ, λ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a) ಸರಳ ರೇಖೆ $y = mx + c$ ಯು $y^2 = 4ax$ ಪರವಲಯಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶವಾಗಲು ಬೇಕಾಗುವ ನಿಭಂದನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಚಾಲಕಗಳ (Directrices) ನಡುವಿನ ಅಂತರ = $10\sqrt{2}$ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಆದರೆ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a) x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$\sin^{-1} x - \cos^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 2). \quad 3$$

b) $\tan^2 x - 4 \sec x + 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

30. a) x ನ್ನು ಕುರಿತಾಗಿ e^{ax} ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\sinh^{-1} x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $\sqrt{1+x^2}$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

31. a) $y = a \cos (\log x) + b \sin (\log x)$ ಆದರೆ,

$x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $x^2 + y^2 = 2a^2$ ಮತ್ತು $xy = a^2$ ಎರಡು ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು (a, a)

ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 2

32. a) $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಒಂದು ವಸ್ತುವು S ದೂರವನ್ನು t ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ $S = 5 \cos 2t$ ಸೂತ್ರದಂತೆ

ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು S ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a) $e^x + e^y = e^{x+y}$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx} = -e^{y-x}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. ದೀರ್ಘವೃತ್ತ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅನುಕಲನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

2 × 10 = 20

35. a) ಅತಿಪರವಲಯವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುಪಥವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ ಮತ್ತು ಅತಿಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & a^2 & bc \\ 1 & b^2 & ca \\ 1 & c^2 & ab \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$
 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

36. a) ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಘಾತಾಂಕಗಳಿಗೆ ಡಿ ಮೂಯಿವೆರ್ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ಮತ್ತು $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$
ಆದರೆ, \vec{a} ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು \vec{b} ಮತ್ತು \vec{c} ದಿಶಗಳ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಏಕದಿಶವನ್ನು (Unit vector) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

37. a) ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಳವುಳ್ಳ ಲಂಬ ಶಂಖುವಿನ ಎತ್ತರವು 12 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅದರ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 9 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದು, ಅದಕ್ಕೆ ನೀರನ್ನು $1\frac{1}{2}$ ಘನ ಸೆ.ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡ್ ದರದಲ್ಲಿ ಸುರಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು 4 ಸೆ.ಮೀ. ಇರುವಾಗ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ ಮತ್ತು ನೀರಿನ ಸಮತಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\sqrt{2} \operatorname{cosec} x + \cot x = \sqrt{3}$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

[Turn over

38. a) $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{\pi}{4} \text{ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.}$$

6

b) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅವಕಲನ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 6x e^{x-y}.$$

4

(English Version)

- Instructions :* i) The question paper has *four Parts - A, B, C and D*. Answer all the parts.
- ii) **Part - A** carries 10 marks, **Part - B** carries 20 marks, **Part - C** carries 40 marks and **Part - D** carries 20 marks.

PART - A

Answer *all* the *ten* questions :

$10 \times 1 = 10$

1. Find the digit in the unit place of 3^{12} .

2. If $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 3x-5 \end{bmatrix}$ and $B = A'$, find the

value of x .

3. If the binary operation $*$ on the set of integers Z is defined by $a * b = a + b + 5$, find the identity element.

4. Find the direction cosines of the vector $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$.

5. Find the radical axis of the circles

$$x^2 + y^2 + 4x - 7 = 0$$

and $x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$.

[Turn over

6. If in the parabola $y^2 = 8 kx$, the length of the latus rectum is 4, find the value of k .

7. Find the value of

$$\sin \left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \right].$$

8. Find the amplitude of $-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. If $y = x^5 \cdot 5^x$, find $\frac{dy}{dx}$.

10. Evaluate : $\int_0^1 (3x - 1)^3 dx$.

PART - B

Answer any *ten* questions :

$10 \times 2 = 20$

11. If $(c, a) = 1$ and c/ab , prove that c/b .

12. Solve the equations by Cramer's Rule :

$$5x + 3y = 1$$

$$3x + 5y = -9.$$

13. Prove that in any group $(G, *)$, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$, $\forall a, b \in G$.

14. Find the volume of the parallelopiped whose coterminus edges are

$$\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}, 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \text{ and } 2\hat{i} + 3\hat{k}.$$

15. Find the equation of the circle having centre at (6, 1) and touching the straight line $5x + 12y - 3 = 0$.

16. Find the length of the latus rectum of an ellipse

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$$

17. If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{4}$, prove that $x + y + xy = 1$.

18. If ω is an imaginary cube root of unity, prove that

$$(1 - \omega + \omega^2)^5 + (1 + \omega - \omega^2)^5 = 32.$$

19. If $y = \cos^{-1} \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + x^2}$.

20. Show that in the parabola $y^2 = 4ax$ the sub-tangent at any point is twice the abscissa.

21. Product of two numbers is 16. Find the numbers when their sum is minimum.

22. Evaluate : $\int \sin \sqrt{x} \, dx$.

PART - C

I. Answer any *three* questions : $3 \times 5 = 15$

23. Find the G.C.D. of 252 and 595 and express it in the form $252a + 595b$ (where a and b are integers). Also show that this expression is not unique. 5

24. a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, find $\text{Adj } A$. 3

b) Given $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, then using Cayley-Hamilton theorem,

prove that $A^2 - 4A + 3I = 0$. 2

25. Prove that

$$G = \{ \cos \theta + i \sin \theta \mid \theta \text{ is real} \}$$

is an Abelian group under multiplication. 5

26. a) Prove that

$$[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]. \quad 3$$

- b) Find the sine of the angle between the vectors $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

and $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$. 2

II. Answer any *two* questions :

2 × 5 = 10

27. a) Derive the expression for the length of the tangent from the point (x_1, y_1) to the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

3

- b) Find the value of λ for which the circles

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0 \text{ and}$$

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + y + \lambda = 0$$

intersect orthogonally.

2

28. a) Derive the condition for the straight line $y = mx + c$ to be a tangent to the parabola $y^2 = 4ax$.

3

- b) Find the equation of the ellipse in the form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b),$$

given distance between the directrices = $10\sqrt{2}$ and the eccentricity = $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2

29. a) Solve for x ,

$$\sin^{-1} x - \cos^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 2).$$

3

- b) Find the general solution of

$$\tan^2 x - 4 \sec x + 5 = 0.$$

2

[Turn over

III. Answer any *three* of the following questions :

3 × 5 = 15

30. a) Differentiate e^{ax} w.r.t. x from first principles. 3

b) Differentiate $\sinh^{-1} x$ w.r.t. $\sqrt{1+x^2}$. 2

31. a) If $y = a \cos (\log x) + b \sin (\log x)$, prove that

$$x^2 y_2 + xy_1 + y = 0. \quad 3$$

b) Show that the curves $x^2 + y^2 = 2a^2$ and $xy = a^2$ touch each other at point (a, a) . 2

32. a) Evaluate : $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$. 3

b) A point moves on a straight line. Its distance S feet from a fixed point on the line at a time t is $S = 5 \cos 2t$. Find its acceleration in terms of S . 2

33. a) If $e^x + e^y = e^{x+y}$, prove that $\frac{dy}{dx} = -e^{y-x}$. 3

b) Evaluate : $\int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$. 2

34. Find the area of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ by the method of

integration. 5

PART - D

Answer any two of the following questions :

2 × 10 = 20

35. a) Define hyperbola as a locus and derive the standard equation of the hyperbola in the form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

6

- b) Prove that

$$\begin{bmatrix} 1 & a^2 & bc \\ 1 & b^2 & ca \\ 1 & c^2 & ab \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

4

36. a) State and prove De Moivre's theorem for rational index. 6

- b) If $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$, find a unit vector perpendicular to \vec{a} and in the same plane as \vec{b} and \vec{c} . 4

37. a) A right circular cone has depth of 12 cm and a base radius of 9 cm. Water is poured into it at the rate of $1\frac{1}{2}$ c.c./sec. Find the rate of rise of water level and rate of increase of water surface when the depth of water level is 4 cm. 6

- b) Find the general solution of $\sqrt{2} \operatorname{cosec} x + \cot x = \sqrt{3}$. 4

[Turn over

38. a) Prove that $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ and show that

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{\pi}{4}.$$

6

b) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 6x e^{x-y}.$$

4
