

Code No. **35**

Total No. of Questions : 40 ]

[ Total No. of Printed Pages : 15

**March, 2008**

**MATHEMATICS**

( Kannada and English Versions )

Time : 3 Hours 15 Minutes ]

[ Max. Marks : 100

( Kannada Version )

- ಸೂಚನೆ : i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C, D** ಮತ್ತು **E** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **E** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

**ವಿಭಾಗ - A**

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1.  $2x + 5 \equiv x + 4 \pmod{5}$  ನ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ  $x$  ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2.  $A = \begin{bmatrix} 5 - x & 2y - 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  ಅದಿಶ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಆದರೆ,  $x$  ಮತ್ತು  $y$  ಗಳ ಬೆಲೆ ಏನು ?
3.  $a * b = \frac{3ab}{7}$  ಆದರೆ,  $*$  ಸಹವರ್ತನಿಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

[ Turn over

4. ಸಮತಲ ಸದಿಶಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.
5.  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  ವೃತ್ತವು ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಲು ಇರುವ ನಿಬಂಧನೆ ಏನು ?
6.  $y^2 = 12x$  ಪರವಲಯದ ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದದ ಕೊನೆ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7.  $\tan ( \tan^{-1} 3 ) + \sec^{-1} \{ \sec^{-1} ( - 2 ) \}$  ರ ಬೆಲೆ ಏನು ?
8.  $i$  ನ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ( Multiplicative inverse ) ಬರೆಯಿರಿ.
9.  $x$  ಅನ್ನು ಕುರಿತು  $y = f ( x )$  ನಿರಂತರ ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯದ ಅವಕಲ ಗುಣಾಂಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಕೊಡಿ.
10.  $\int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 2 = 20

11.  $z$  ಮೇಲಿನ ಸರ್ವಾಂಗಸಮ ಮಾಪನ ( Congruence modulo )  $m$  ಸಂಬಂಧವು  $z$  ಮೇಲಿನ ತುಲ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ  $a \equiv b ( \text{mod } m )$ ,  $z$  ಮೇಲಿನ ತುಲ್ಯತಾ ಸಂಬಂಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
12. ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :  $\begin{vmatrix} 2001 & 2004 \\ 2007 & 2010 \end{vmatrix}$

13. ಒಂದು ಸಂಕುಲದ  $(G, *)$  ಯು  $\forall a \in G, a^{-1} = a$  ಆದರೆ,  $(G, *)$  ಯು ಒಂದು

ಅಬಿಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14.  $\lambda \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  ಮತ್ತು  $\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$  ಇವೆರಡೂ ಲಂಬ ಸದೀಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ  $\lambda$  ದ

ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15.  $x = 3 + 2 \cos \theta$  ಮತ್ತು  $y = 1 + 2 \sin \theta$  ಪ್ರಮಿತಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ವೃತ್ತದ

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಅನುಪ್ರಸ್ಥ ಅಕ್ಷ = 10, ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ  $(e) = 2$  ಆದಾಗ, ಅತಿಪರವಲಯದ (Hyperbola)

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17.  $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{2} + \cos^{-1} \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$  ಆದರೆ,  $x$  ಬೆಲೆ ಏನು ?

18.  $e^{1+i\pi/3} + e^{1-i\pi/3} = e$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19.  $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$  ಆದರೆ,  $(a, b)$  ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ  $\frac{dy}{dx}$  ನ ಬೆಲೆ ಏನು ?

20.  $(1, 3)$  ರಲ್ಲಿ  $x^3 + xy + y^2 = 13$  ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಉಪಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21.  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$  ನ ಬೆಲೆ ಏನು ?

22.  $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = c$  ಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಮಿತಿ  $c$  ಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಅವಕಲ

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

[ Turn over

## ವಿಭಾಗ - C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

23. 39744 ರ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

24. a) 
$$\begin{vmatrix} a^2 + bc & a & 1 \\ b^2 + ca & b & 1 \\ c^2 + ab & c & 1 \end{vmatrix} = -2(a-b)(b-c)(c-a)$$
 ಎಂದು

ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) ಕ್ರಮರಾಜನ ನಿಯಮದಂತೆ  $x$  ಮತ್ತು  $y$  ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$x + 2y = 7$$

$$4x - 5y = 2. \quad 2$$

25. a) ಗುಣಾಕಾರ ಸಾಪೇಕ್ಷದ ( Multiplication modulo ) ಅಧೀನದಲ್ಲಿ

$$H = \{ 1, 2, 4 \} \otimes_7 \quad \text{ಎಂಬುದು} \quad G = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \otimes_7$$

ಸಂಕುಲದ ಉಪಸಂಕುಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) ಸಂಕುಲದ ತತ್ಸಮಕ ಅವಯವವು ಏಕೈಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

26. a)  $\hat{i} - \hat{j} + \lambda \hat{k}$ ,  $4\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ ,  $5\hat{i} + \hat{j} + 14\hat{k}$  ಮತ್ತು  $3\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k}$  ಎಂಬ ಸದಿಶಗಳು ನಾಲ್ಕು ಸಮತಲ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಿತಿ ಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,  $\lambda$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$  ಇದರ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಏಕಕ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

2 × 5 = 10

27. a)  $x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0$  ಮತ್ತು  $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$  ವೃತ್ತಗಳನ್ನು  
ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಮತ್ತು  $3x + 4y + 5 = 0$  ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ  
ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ( 4, 2 ) ಮತ್ತು ( - 5, 7 ) ಬಿಂದುಗಳು ವ್ಯಾಸದ ತುದಿಗಳಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ  
ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a)  $y = mx + c$  ಸರಳರೇಖೆಯು  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ಅತಿಪರವಲಯಕ್ಕೆ (   
Hyperbola ) ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಬೇಕಾಗಲು ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $y^2 - 8x - 32 = 0$  ಪರವಲಯದ ( Parabola ) ನಾಭಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29.  $\tan^{-1} \sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}} =$   
0 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

30. a) ಮೂಲ ತತ್ವದಿಂದ  $x$  ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ,  $\operatorname{cosec} ( ax )$  ಅನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ. 3

b)  $\sin x$  ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು  $\log_e x$  ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಅವಲಂಬಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ. 2

[ Turn over

31. a)  $e^x + e^y = e^{x+y}$  ಆದರೆ,  $\frac{dy}{dx} = -e^{y-x}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

b)  $x = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ ,  $y = \cos^{-1}(4t^3 - 3t)$  ಆದರೆ,  $\frac{dy}{dx} = 6$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

32. a)  $y = \sin^2 \left\{ \cot^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right\}$  ಆದರೆ,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b)  $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a)  $\int \frac{\cos x}{2 \sin^2 x + 3 \sin x + 4} dx$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$  ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. ಸಮಾಕಲನ ವಿಧಾನದಿಂದ  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

### ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :  $2 \times 10 = 20$

35. a) ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  ಆದರೆ, ಕ್ಯಾಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, A ನ

ಅನುಲೋಮವನ್ನು ( $A^{-1}$ ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

36. a) ಎಲ್ಲಾ ಅಕರಣೀಯ ಸೂಚಕಾಂಕಗಳಿಗೆ ಡಿ ಮೂಯಿವರ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿ. 6
- b) ಜ್ಯಾ ನಿಯಮ  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  ಎಂದು ಸದಿಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿ. 4
37. a)  $a$  ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಆಯತವನ್ನು ಅಂತರ್ಗತಗೊಳಿಸಬೇಕಾದರೆ ಆ ಆಯತವು ಚೌಕವಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6
- b)  $(\sqrt{3} + 1) \cos \theta + (\sqrt{3} - 1) \sin \theta = 2$  ಎಂಬುದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4
38. a)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6
- b)  $\frac{dy}{dx} = (x + y - 1)^2$  ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ. 4

### ವಿಭಾಗ - E

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

1 × 10 = 10

39. a)  $1 + i$  ಮಿಶ್ರ ಊಹೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿ. 4
- b)  $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$  ವೃತ್ತ ಮತ್ತು  $x - 7y - 8 = 0$  ರೇಖೆ ಇವುಗಳಿಂದ ಛೇದಿಸಲ್ಪಡುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4
- c)  $7^{123}$  ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಕ ಸ್ಥಾನ (ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನ) ದ ಅಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

[ Turn over

40. a)  $|\vec{a}| = 13$ ,  $|\vec{b}| = 19$  ಮತ್ತು  $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$  ಆದರೆ,  $|\vec{a} - \vec{b}|$

ಯ ಬೆಲೆ ಏನು ?

4

b)  $\int \tan^4 x \, dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4

c)  $y = \log \sqrt{\cos x}$  ಆದರೆ,  $\frac{dy}{dx}$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2



**( English Version )**

- Instructions :* i) The question paper has *five Parts – A, B, C, D and E.*  
Answer all the parts.
- ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks,  
**Part – C** carries 40 marks, **Part – D** carries 20 marks and  
**Part – E** carries 10 marks.

**PART – A**

Answer *all the ten* questions :

10 × 1 = 10

1. Find the least positive integer  $x$  satisfying  $2x + 5 \equiv x + 4 \pmod{5}$ .
2. If  $A = \begin{bmatrix} 5 - x & 2y - 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  is scalar matrix, find  $x$  and  $y$ .
3. If  $a * b = \frac{3ab}{7}$ , then prove that  $*$  is associative.
4. Define co-planar vectors.
5. Write the condition for the circle  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  touches both axes.
6. Find the co-ordinates of the end points of length of the latus rectum of the parabola  $y^2 = 12x$ .
7. Find the value of  $\tan ( \tan^{-1} 3 ) + \sec^{-1} \{ \sec ( - 2 ) \}$ .

[ Turn over

8. Write the multiplicative inverse of  $i$ .
9. Define the differential coefficient of a continuous function  $y = f(x)$  w.r.t.  $x$ .
10. Evaluate  $\int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx$ .

**PART - B**

Answer any *ten* questions :

10 × 2 = 20

11. The relation 'Congruence modulo  $m$ ' is an equivalence relation on  $z$  or prove that  $a \equiv b \pmod{m}$  is an equivalence relation on  $z$ .
12. Evaluate  $\begin{vmatrix} 2001 & 2004 \\ 2007 & 2010 \end{vmatrix}$ .
13. If in a group  $(G, *) \forall a \in G, a^{-1} = a$ , then prove that  $(G, *)$  is an Abelian group.
14. If the vectors  $\lambda \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  and  $\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$  are orthogonal, find  $\lambda$ .
15. Find the area of the circle whose parametric equations are  
 $x = 3 + 2 \cos \theta$  and  $y = 1 + 2 \sin \theta$ .

16. Find the equation of the hyperbola in the form  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Given

that transverse axis = 10, and eccentricity ( $e$ ) = 2.

17. Find  $x$  if  $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{2} + \cos^{-1} \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ .

18. Prove that  $e^{1+i\pi/3} + e^{1-i\pi/3} = e$ .

19. If  $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ , then find  $\frac{dy}{dx}$  at  $(a, b)$ .

20. Find the length of the sub-tangent to the curve  $x^3 + xy + y^2 = 13$

at  $(1, 3)$ .

21. Evaluate  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ .

22. Form the differential equation by eliminating the parameter  $c$ .

$$\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = c.$$

### PART - C

I. Answer any *three* questions :

$3 \times 5 = 15$

23. Find the number of all positive divisors and the sum of all positive divisors of 39744.

5

[ Turn over

24. a) Show that

$$\begin{vmatrix} a^2 + bc & a & 1 \\ b^2 + ca & b & 1 \\ c^2 + ab & c & 1 \end{vmatrix} = -2(a-b)(b-c)(c-a). \quad 3$$

b) Find the values of  $x$  and  $y$  according to Cramer's rule :

$$x + 2y = 7$$

$$4x - 5y = 2. \quad 2$$

25. a) Prove that the set  $H = \{ 1, 2, 4 \} \otimes_7$  is a sub-group of the group

$$G = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \otimes_7 \text{ under multiplication modulo } 7. \quad 3$$

b) Prove that the identity element of a group is unique. 2

26. a) If the vectors  $\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ ,  $4\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ ,  $5\hat{i} + \hat{j} + 14\hat{k}$  and  $3\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k}$  are the position vectors of the four coplanar points, find  $\lambda$ . 3

b) Find the unit vector in the direction of  $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ . 2

II. Answer any *two* questions :

2 × 5 = 10

27. a) Find the equation of the circle which cuts the two circles  $x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0$  and  $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$  orthogonally and whose centre lies on the line  $3x + 4y + 5 = 0$ . 3

b) Find the equation of the circle having  $(4, 2)$  and  $(-5, 7)$  as end points of the diameter. 2

28. a) Find the condition for the line  $y = mx + c$  to be a tangent to the hyperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . 3

- b) Find the focus of the parabola  $y^2 - 8x - 32 = 0$ . 2

29. Prove that

$$\tan^{-1} \sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}} = 0 \quad 5$$

III. Answer any *three* of the following questions : 3 × 5 = 15

30. a) Differentiate  $\operatorname{cosec}(ax)$  w.r.t.  $x$  from the first principle. 3

- b) Differentiate  $\sin x$  with respect to  $\log_e x$ . 2

31. a) If  $e^x + e^y = e^{x+y}$  prove that  $\frac{dy}{dx} = -e^{y-x}$ . 2

- b) If  $x = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ ,  $y = \cos^{-1}(4t^3 - 3t)$ , prove that

$$\frac{dy}{dx} = 6. \quad 3$$

32. a) If  $y = \sin^2 \left\{ \cot^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right\}$ , prove that  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ . 3

- b) Evaluate  $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$ . 2

[ Turn over

33. a) Evaluate  $\int \frac{\cos x}{2 \sin^2 x + 3 \sin x + 4} dx.$  3
- b) Evaluate  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx.$  2
34. Find the area of the ellipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  by integration method. 5

**PART - D**

Answer any *two* of the following questions :

2 × 10 = 20

35. a) Define an ellipse. Derive the equation of the ellipse in the standard form
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad 6$$
- b) If  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ , find  $A^{-1}$  by Cayley-Hamilton theorem. 4
36. a) State and prove D'Moivre's theorem for rational index. 6
- b) Prove that the sine rule
- $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ by vector method.} \quad 4$$
37. a) Prove that the greatest size rectangle that can be inscribed in a circle of radius  $a$  is a square. 6
- b) Find the general solution of
- $$(\sqrt{3} + 1) \cos \theta + (\sqrt{3} - 1) \sin \theta = 2. \quad 4$$

38. a) Prove that  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$ . 6

b) Solve the differential equation  $\frac{dy}{dx} = (x + y - 1)^2$ . 4

**PART - E**

Answer any *one* of the following questions :

1 × 10 = 10

39. a) Find the cube roots of  $1 + i$  and represent the Argand diagram. 4

b) Find the length of the chord intercepted by the circle

$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$  and the line  $x - 7y - 8 = 0$ . 4

c) Find the digit in the unit place of  $7^{123}$ . 2

40. a) If  $|\vec{a}| = 13$ ,  $|\vec{b}| = 19$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ , find  $|\vec{a} - \vec{b}|$ . 4

b) Find  $\int \tan^4 x \, dx$ . 4

c) If  $y = \log \sqrt{\cos x}$ , find  $\frac{dy}{dx}$ . 2

=====

[ Turn over