No. of Printed Pages : 8

MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2018

02672

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. **1** is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. **2** to **7**. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. Are the following statements *True* or *False* ? Give reasons for your answers. *5×2=10*

(a) For the function f, defined by $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2$, there exists a point $c \in \left] -\frac{1}{2}, 2\right[$ satisfying $f'(c) = 0$.

(b) For all even integral values of n,

$$\lim_{x \to \infty} (x + 1)^{-n} \text{ exists.}$$

(c) The function f, defined by $f(x) = [x - 1]$, (where [x] is the greatest integer function) is integrable on the interval [2, 4].

(d) Every infinite set is an open set.

(e) All strictly monotonically decreasing sequences are convergent.

2. (a) Let a function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{if} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 4, & \text{if} \quad x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Show that f is not continuous at any $x \in \mathbf{R}$. *3*

(b) State the Cauchy's general principle of convergence for sequences. Apply it to check whether the sequence $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ is convergent or not. *3*

(c) Check whether the set $[-3, 7[\, \cap \,]-7, 3]$ is a neighbourhood of 2 or not. *4*

3. (a) Show that the function f given by

$$f(x) = \frac{1}{(2x-4)^2} \quad \forall\, x \in\,]-2, 2[$$

is continuous but not bounded in the interval $]-2, 2[$. *4*

(b) Check whether the sequence, $\{S_n\}$, where

$$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)!},$$

is convergent or not. *3*

(c) Use Weierstrass' M-Test to prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ converges uniformly in the interval $\left[0, \frac{1}{5}\right]$. 3

4. (a) Prove that if f and g are two real-valued functions defined on the closed interval [a, b] such that f is Riemann integrable, g is differentiable and $g'(x) = f(x) \ \forall \ x \in [a, b]$. Show that $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$. 5

(b) Test the absolute and conditional convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+7}$. 3

(c) Check whether the intervals [6, 9[and]2, 5] are equivalent or not. 2

5. (a) Test the following series for convergence :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3.6.9...3n}{7.10.13...(3n+4)} x^n, \ x > 0$$ 5

(b) Prove that between any two real roots of the equation, $2e^{2x} \sin 3x - 3 = 0$, there is at least one real root of the equation, $e^{2x} \cos 3x + 1 = 0$. 5

6. (a) Show that the sequence $\{f_n\}$ of functions, where $f_n(x) = \dfrac{n}{x + 2n}$, is uniformly convergent in $[0, k]$, where $k > 0$. *4*

(b) Examine the function,

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 150$$

for extreme values. *3*

(c) Check whether the set $\left\{\frac{2}{7}, \frac{2}{8}, \frac{2}{9}, \ldots\right\}$ is countable or not. Also give an example of a proper subset of **R** which is uncountable. *3*

7. (a) Use Lagrange's mean value theorem to prove that

$$x - \frac{x^2}{2} < \log_e(1 + x) < x - \frac{x^2}{2(1 + x)}, \text{ if } x > 0.$$ *5*

(b) Check whether the function, f, defined below, is uniformly continuous or not :

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \ x \in [1, 2].$$ *3*

(c) Is every onto strictly decreasing function invertible ? Justify your answer. *2*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

1. क्या निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* ? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए । *5×2=10*

(क) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए एक ऐसे बिन्दु $c \in \left] -\frac{1}{2}, 2\right[$ का अस्तित्व होता है जहाँ कि $f'(c) = 0$.

(ख) n के सभी सम समाकल मानों के लिए

$$\lim_{x \to \infty} (x+1)^{-n} \text{ का अस्तित्व है ।}$$

(ग) $f(x) = [x - 1]$ द्वारा परिभाषित फलन f (जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन है) अन्तराल [2, 4] पर समाकलनीय है ।

(घ) प्रत्येक अनंत समुच्चय एक विवृत समुच्चय होता है ।

(ङ) सभी निरंतर एकदिष्टतः ह्रासमान अनुक्रम अभिसारी होते हैं ।

2. (क) मान लीजिए कि फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{यदि} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 4, & \text{यदि} \quad x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है । दिखाइए कि किसी भी $x \in \mathbf{R}$ पर f संतत नहीं है । 3

(ख) अनुक्रमों के लिए कौशी के व्यापक अभिसरण नियम का कथन दीजिए । अनुक्रम $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ अभिसारी है या नहीं यह जाँचने के लिए इसे लागू कीजिए । 3

(ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय $[-3, 7[\cap]-7, 3]$, 2 का प्रतिवेश है या नहीं । 4

3. (क) दिखाइए कि

$$f(x) = \frac{1}{(2x-4)^2} \quad \forall \; x \in \;]-2, 2[$$

द्वारा परिभाषित फलन f संतत है लेकिन अंतराल $]-2, 2[$ पर परिबद्ध नहीं है । 4

(ख) जाँच कीजिए कि अनुक्रम $\{S_n\}$ अभिसारी है या नहीं, जहाँ

$$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)!}. \qquad 3$$

(ग) वाइर्स्ट्रास M-परीक्षण का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ अन्तराल $\left[0, \frac{1}{5}\right]$ में एकसमानत: अभिसरण करती है । 3

4. (क) सिद्ध कीजिए कि यदि f और g संवृत अंतराल [a, b] पर परिभाषित ऐसे दो वास्तविक-मान फलन हैं, जिनके लिए f रीमान समाकलनीय है, g अवकलनीय है और $g'(x) = f(x) \; \forall \; x \in [a, b]$. दिखाइए कि

$$\int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a).$$ 5

(ख) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+7}$ के निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण की जाँच कीजिए । 3

(ग) जाँच कीजिए कि अन्तराल [6, 9[और]2, 5] तुल्य हैं या नहीं । 2

5. (क) अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणी की जाँच कीजिए :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3.6.9 \ldots 3n}{7.10.13 \ldots (3n+4)} x^n, \; x > 0$$ 5

(ख) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $2e^{2x} \sin 3x - 3 = 0$ के किन्हीं दो वास्तविक मूलों के बीच समीकरण $e^{2x} \cos 3x + 1 = 0$ का कम-से-कम एक वास्तविक मूल होता है । 5

6. (क) दिखाइए कि फलनों का अनुक्रम $\{f_n\}$, जहाँ

$f_n(x) = \dfrac{n}{x + 2n}$, $[0, k]$ पर एकसमानतः अभिसारी होता है, जहाँ $k > 0$. *4*

(ख) चरम मानों के लिए फलन

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 150$$

की जाँच कीजिए । *3*

(ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय $\left\{\frac{2}{7}, \frac{2}{8}, \frac{2}{9}, \ldots\right\}$ गणनीय है या नहीं । **R** के एक ऐसे उचित उपसमुच्चय का उदाहरण भी दीजिए जो अगणनीय हो । *3*

7. (क) लग्रांज के माध्य मान प्रमेय द्वारा सिद्ध कीजिए कि

$$x - \frac{x^2}{2} < \log_e(1 + x) < x - \frac{x^2}{2(1 + x)}, \text{ यदि } x > 0.$$ *5*

(ख) जाँच कीजिए कि नीचे परिभाषित फलन f एकसमानतः संतत है या नहीं :

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \; x \in [1, 2].$$ *3*

(ग) क्या प्रत्येक आच्छादी निरंतर ह्रासमान फलन व्युत्क्रमणीय होता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *2*