Seat No. : _______________

FS(R)-02

April-2007

Mathematics (Calculus)

Paper-I

(New Course)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 105**

સૂચના : (1) **બધા** પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

(2) **દરેક** પ્રશ્નના ગુણ સરખા છે.

1. (અ) લાયબ્નીઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

અથવા

(અ) જો $I_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^n.\log x)$ હોય તો સાબિત કરો કે

$I_n = n.\ I_{n-1} + (n-1)\,!$ અને આ ઉપરથી તારવો કે

$I_n = n\,!\left[\log x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right]$

(બ) ગમે તે **બે** ના જવાબ આપો :

(i) જો $y = \tan x$ હોય તો $y_5\,(0)$ શોધો.

(ii) જો $x = \operatorname{cosec} 2\theta,\ y = \tan^m\theta$ હોય તો સાબિત કરો કે

$(x^2 - 1)\, y_{n+2} + (2n+1)\, x.y_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0.$

(iii) સાબિત કરો કે $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\log x}{x}\right) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\left[\log x - 1 - \frac{1}{2} - ..... - \frac{1}{n}\right]$

2. (અ) શ્રેઢી $\sum \frac{1}{n^P}$, $P \le 1$ માટે અપસારી અને $P > 1$ માટે અભિસારી છે તેમ બતાવો.

અથવા

(અ) કોશીની મૂળ કસોટી શ્રેઢી માટે લખો અને સાબિત કરો.

(બ) અભિસારીતા ચર્ચો : (ગમે તે **બે**)

(i) $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.5} + \frac{1.3.5}{2.5.8} + \frac{1.3.5.7}{2.5.8.11} + ...$

(ii) $\frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{4.5} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n\right]$

(ક) ગમે તે **એક** ઘાત શ્રેઢીની અભિસાર ત્રિજ્યા શોધો :

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$

(ii) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$

3. (અ) લાંગ્રાન્જનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(બ) ગમે તે **ત્રણ** ના જવાબ આપો :

(i) જો $3a - 4b + 6c - 12d = 0$ હોય તો સાબિત કરો કે સમીકરણ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$ નું એકબીજ -1 અને 0 ની વચ્ચે છે.

(ii) $f(x) = \log x$, $g(x) = \tan^{-1}x$, $\forall\ x \in [1, 3]$ લઈ મધ્યકમાન પ્રમેયનું સમર્થન કરી સાબિત કરો કે $\frac{4}{3} < \frac{\log 3}{\cot^{-1} 2} < 4$.

(iii) $\log(\cos x)$ ના વિસ્તરણમાં x^4 નો સહગુણક શોધો.

(iv) $\log x$ નું $(x - 1)$ ના ચઢતા ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો. જ્યાં $0 < x \leq 2$.

(v) કિંમત મેળવો $\lim_{x \to 0} (\operatorname{Sec}^2 x)^{\cot^2 x}$.

4. (અ) જો $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x\, dx$ હોય તો સાબિત કરો કે $I_n + n \cdot (n-1)\, I_{n-2} = n \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$

(બ) ગમે તે **બે** ના જવાબ આપો :

(i) લક્ષ મેળવો :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right) \ldots\ldots\left(1 + \frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

(ii) વક્ર $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ ના ચાપની લંબાઈ શોધો.

(iii) a ત્રિજ્યાવાળા ગોલકનું વક્ર પૃષ્ઠફળ મેળવો.

(iv) તારક $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ નું X-અક્ષની આસપાસ પરિભ્રમણ કરતાં રચાતાં ઘનનું ઘનફળ શોધો.

5. (અ) વિકલ સમીકરણ $M(x,y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ યથાર્થ હોવાની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ છે તેમ બતાવો.

(બ) ગમે તે **ત્રણ** ના જવાબ આપો :

(i) સમીકરણ $x\,dx + y\,dy + x\,dy - y\,dx = 0$ ઉકેલો.

(ii) $r^2 = c^2 \cos 2\theta$ ના લંબચ્છેદી વક્રો શોધો.

(iii) $\left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dx}{dy} - 1\right) = \frac{dx}{dy}$ ઉકેલો.

(iv) $P^2 - 4P + 3 = 0$ જ્યાં $P = \frac{dy}{dx}$ ઉકેલો.

(v) $(y - px)^2 = 4p^2 + 1$ ઉકેલો.

6. (અ) પ્રચલિત સંકેતમાં સાબિત કરો કે $\frac{1}{f(D)} \cdot e^{ax} \cdot V = e^{ax} \cdot \frac{1}{f(D + a)} \cdot V$

(બ) ઉકેલો (ગમે તે **ત્રણ**) :

(i) $(D^2 - 1)\,y = x^2 \cdot \cos x$

(ii) $(D^2 + D + 1)^2\,y = 0$

(iii) $(D^2 - 5D + 6)\,y = 2 \cdot e^{3x} + 3 \cdot e^{2x} + e^{6x}$

(iv) $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \cdot \log x$

(v) $2x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 24x$

7. (અ) સમતલમાં ગતિ કરતા કણ માટે વેગના અને પ્રવેગના ત્રિજ્ય અને અનુપ્રસ્થ વિઘટકો મેળવો.

અથવા

(અ) શક્તિ સંરક્ષણનો નિયમ લખો અને સાબિત કરો.

(બ) ગમે તે **બે** ના જવાબ લખો :

(i) સમતલ સપાટી પરથી h ઊંચાઈએ આવેલી એક ટેકરી ઉપર એક બંદૂક ગોઠવેલી છે. બંદૂકને θ ખૂણે ફોડવામાં આવે અને તેનો પ્રક્ષેપ વેગ V હોય, તો તે મહત્તમ ક્ષૈતિજ અંતર કાપે છે. સાબિત કરો કે $\operatorname{cosec}^2 \theta = 2\left(1+\frac{gh}{v^2}\right)$.

(ii) સાદી સ્વરીત ગતિ વ્યાખ્યાયિત કરો અને તેનું સમીકરણ $x = a \cos (pt + \varepsilon)$ સ્વરૂપમાં મેળવો. તેનો આવર્તકાળ મેળવો.

(iii) એક કણ ગતિમાર્ગ $r = a \cdot e^{\theta}$ ઉપર એવી રીતે ગતિ કરે છે કે તેના પ્રવેગનો અરીય સંઘટક હંમેશા શૂન્ય થાય છે. સાબિત કરો કે $\frac{d\theta}{dt}$ અચળ છે અને તેના વેગ અને પ્રવેગનાં મહત્વ r ના સમપ્રમાણમાં છે.

Seat No. : _______________

FS(R)-02

April-2007

Mathematics (Calculus)

Paper-I

(New Course)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 105**

Instructions : (1) Attempt **all** questions.

(2) Each question carries equal marks.

1. (a) State and Prove Leibnitz's theorem.

OR

(a) If $I_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^n.\log x)$ then Prove that

$I_n = n.\, I_{n-1} + (n-1)\,!$ and Hence deduce

$I_n = n\,!\left[\log x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right]$

(b) Answer any **two** :

(i) If y = tan x then find $y_5(0)$.

(ii) If $x = \text{cosec}2\theta$, $y = \tan^m\theta$ then Prove that

$(x^2 - 1)\, y_{n+2} + (2n+1)\, x.y_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0.$

(iii) Prove that $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\log x}{x}\right) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\left[\log x - 1 - \frac{1}{2} - ..... - \frac{1}{n}\right]$

2. (a) Prove that the series $\sum \frac{1}{n^P}$ is divergent for $P \leq 1$ and convergent for $P > 1$.

OR

(a) State and Prove cauchy root test for series.

(b) Discuss the convergence (any **two**) :

(i) $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.5} + \frac{1.3.5}{2.5.8} + \frac{1.3.5.7}{2.5.8.11} + ...$

(ii) $\frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{4.5} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - n\right]$

(c) Find he radius of convergence of the power series (any **one**) :

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$

(ii) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$

3. (a) State and prove Langrange's mean value theorem.

(b) Attempt any **three** :

(i) If $3a - 4b + 6c - 12\,d = 0$ then prove that one root of the equation
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \neq 0$ lies between -1 and 0.

(ii) Verify Mean value theorem for $f(x) = \log x$, $g(x) = \tan^{-1}x$, $\forall\ x \in [1, 3]$ Hence prove that $\frac{4}{3} < \frac{\log 3}{\cot^{-1} 2} < 4$

(iii) Find the coefficient of x^4 in the expansion of $\log(\cos x)$.

(iv) Expand $\log x$ in the increasing powers of $(x - 1)$. Where $0 < x \leq 2$.

(v) Evaluate $\lim_{x \to 0} (\operatorname{Sec}^2 x)^{\cot^2 x}$.

4. (a) If $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x\, dx$ then prove that $I_n + n \cdot (n-1)\, I_{n-2} = n \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$

(b) Attempt any **two** :

(i) Obtain the limit :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\left(1 + \frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

(ii) Find the length of the arc of the curve $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

(iii) Obtain the curved surface area of the sphere with radius a.

(iv) Find the volume of the solids generated by rotating of the astroid

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \text{ about x-axis.}$$

5. (a) Show that $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ is necessary and sufficient condition for the differential equation $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ to be exact.

(b) Attempt any **three** :

(i) Solve : $x dx + y\,dy + x\,dy - y\,dx = 0$

(ii) Find the orthogonal intersecting curves to the curves $r^2 = c^2 \cos 2\theta$

(iii) Solve : $\left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dx}{dy} - 1\right) = \frac{dx}{dy}$

(iv) Solve : $P^2 - 4P + 3 = 0$ where $P = \frac{dy}{dx}$

(v) Solve : $(y - px)^2 = 4p^2 + 1$.

6. (a) In usual notation, Prove that $\frac{1}{f(D)} \cdot e^{ax} \cdot V = e^{ax} \cdot \frac{1}{f(D + a)} \cdot V$

(b) Solve (any three)

(i) $(D^2 - 1)\,y = x^2 \cdot \cos x$

(ii) $(D^2 + D + 1)^2\,y = 0$

(iii) $(D^2 - 5D + 6)\,y = 2 \cdot e^{3x} + 3 \cdot e^{2x} + e^{6x}$

(iv) $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \cdot \log x$

(v) $2x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 24x$

7. (a) Find the Radial and Transverse Components of velocity and acceleration of a Particle moving in a plane.

OR

(a) State and prove the law of conservation of energy.

(b) Attempt any **two** :

(i) A gun is mounted on a hill of height h above a level plain. If the greatest horizontal range for given muzzle velocity V is obtained by firing at an angle of elevation θ then prove that $\operatorname{cosec}^2 \theta = 2\left(1 + \frac{gh}{v^2}\right)$.

(ii) Define simple harmonic motion and obtain its equation in the form $x = a \cos (pt + \varepsilon)$. Also obtain its periodic time.

(iii) A Particle moves on the curve $r = a \cdot e^{\theta}$ in such a way that the radial component of its acceleration is always zero. Prove that $\frac{d\theta}{dt}$ = constant and the magnitudes of its velocity and acceleration are directly proportional to r.