Total No. of Questions : 40]

Total No. of Printed Pages : 16]

Code No. **35**

June/July, 2011

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

Time : 3 Hours 15 Minutes] [Max. Marks : 100

(Kannada Version)

ಸೂಚನೆ : i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C, D** ಮತ್ತು **E** ಎಂಬ ಐದು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **E** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ – A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $10 \times 1 = 10$

1. ಭಾಜನ ವಿಧಿಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

2. $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ω ಯು ಏಕಕದ ಒಂದು ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಘನಮೂಲ.

3. ಅರೆ-ಸಂಕುಲವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

[Turn over

4. A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶಗಳು $2i - j - k$ ಮತ್ತು

$4i - 5j - 7k$ ಆಗಿದ್ದಾಗ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^2 + y^2 - 2x \cos\theta - 2y \sin\theta - 3 = 0$ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $x^2 - y^2 = 4$ ಅತಿಪರವಲಯದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ e_1 ಆದರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಅನುವರ್ತಿ (Conjugate) ಅತಿಪರವಲಯದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ e_2 ಆದರೆ, e_2 ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\sin^{-1}(\sin 100°) + \cos^{-1}(\cos 100°)$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $(1 + \cos\theta + i \sin\theta)$ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೋನಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $f(x) = e^{2 \log(\sin x)}$ ಇದ್ದಾಗ, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $\int_0^1 xe^x \, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ – B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $10 \times 2 = 20$

11. $a \equiv b \pmod m$ ಮತ್ತು $n > 1$, m ನ ಧನ ಭಾಜಕವಾದರೆ $a \equiv b \pmod n$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ $A \cdot adj\, A = |A| \cdot I$ ಎಂದು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸಿ.

13. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ I ಮೇಲೆ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ $*$ ನ್ನು $a * b = a + b + ab$, $\forall\ a, b \in I$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದಾಗ, I ನಲ್ಲಿ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ $*$ ಸಹವರ್ತನೀಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. ಗುಣಾಕಾರ (mod 5) ರ ಸಂಕುಲ $G = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ ರ ತುಚ್ಛ ಉಪಸಂಕುಲಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಗಣ $H_1 = \{ 1, 2 \}$ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಉಪಸಂಕುಲವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

15. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ವೃತ್ತವು $c = g^2$ ಆದಾಗ, x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ ವೃತ್ತವು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $\sec^2 \left(\tan^{-1} x \right) + \text{cosec}^2 \left(\cot^{-1} x \right) = 2 \left(1 + x^2 \right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

17. $e^{1 + \frac{i\pi}{6}} - e^{1 - \frac{i\pi}{6}}$ ಯಲ್ಲಿ ಊಹ್ಯ ಭಾಗ (Purely imaginary) ಮಾತ್ರವಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಸದಿಶಗಳು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ (Rhombus) ಬಾಹುಗಳಾದರೆ $\left(\vec{a} + \vec{b} \right) . \left(\vec{a} - \vec{b} \right)$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $y = \log \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$ ಆದರೆ, $\left(1 + x^2 \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. $y = \tan^{-1} \left[\frac{ax - b}{bx + a} \right]$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21. $\int e^x \left[\frac{1 + \sin x \cos x}{\cos^2 x} \right] dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

ವಿಭಾಗ – C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $3 \times 5 = 15$

23. 408 ಮತ್ತು 1032 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು (G.C.D.) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು $408\,x + 1032\,y$, $x, y \in I$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, x ಮತ್ತು y ಗಳು ಯೂನಿಕ್ ಅಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. 5

24. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + \sum a^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

25. a) ಗುಣಾಕಾರ (mod 10) ಪರಿಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಗಣ $G = \{ 1, 3, 7, 9 \}$ ಒಂದು ಸಂಕುಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) ಒಂದು ಸಂಕುಲದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳು ಅವುಗಳದ್ದೇ ಆದ ವಿಲೋಮಗಳಾದರೆ ಅದು ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಂಕುಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

26. a) $\vec{a}$ ಯಾವುದೇ ಸದಿಶವಾದಾಗ

$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ ಮತ್ತು $\vec{c}$ ಸದಿಶಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಾದಾಗ

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

($\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ). 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 5 = 10$

27. a) $x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0$ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. 3

b) $(k, 1)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 3 = 0$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ದೂರ $\sqrt{7}$ ಆದಾಗ, k ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a) $3x^2 - 4y^2 - 6x + 8y = 13$ ಶಂಕುಜದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಈ ಶಂಕುಜದ ಸಹಾಯಕ ವೃತ್ತದ (Auxiliary circle) ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $2y = 5x + k$ ಯು ಪರವಲಯ $y^2 = 6x$ ನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದಾಗ k ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$ ಆದಾಗ, $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2xyz$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\tan \theta + \cot \theta = 2$ ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $3 \times 5 = 15$

30. a) ಮೂಲ ತತ್ವದಿಂದ x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\tan x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $(\sin hx)^{\cos hx}$ ನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ. 2

[Turn over

31. a) $y = e^{m\theta}$ ಮತ್ತು $x = \cos\theta$ ಆದಾಗ,

$\left(1 - x^2\right) y_2 - x y_1 - m^2 y = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $2y = x^3 + 5x$ ಮತ್ತು $y = x^3 + x + 1$ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು (1, 3) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 2

32. a) $x^2 y^2 = a^2\left(x^2 - a^2\right)$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು ಕ್ಷಿತಿಜಾಂಕದ ಘನಮೂಲದ ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a) $\frac{1}{3\sin x + 4\cos x + 5}$ ನ್ನು x ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅನುಕಲಿಸಿ. 3

b) $\int \frac{\cos x\, dx}{(1 - \sin x)(2 - \sin x)}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. $x^2 + y^2 - 16 = 0$ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅನುಕಲನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ – D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 10 = 20$

35. a) ದೀರ್ಘ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$ ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ ಮತ್ತು ದೀರ್ಘವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಲಂಬ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದು ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. 6

b) ಕ್ಯಾಲೆ–ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

36. a) $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$ ಮತ್ತು $y + \frac{1}{y} = 2 \cos \beta$ ಇದ್ದಾಗ $x = \text{cis}\ \alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು $y = \cos \beta$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

i) $x^m y^{-n} + y^n x^{-m} = 2 \cos (m\alpha - n\beta)$

ii) $x^m y^{-n} - y^n x^{-m} = 2i \sin (m\alpha - n\beta)$. 6

b) ನಿರ್ದೇಶಕ $x + 2 = 0$, ಅಕ್ಷ $y = 3$ ಮತ್ತು ನಾಭಿ ಲಂಬದ ಉದ್ದ $= 8$ ಇರುವ ಪರವಲಯಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

37. a) $$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\ dx & f(x) \text{ ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ} \\ 0 & f(x) \text{ ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ} \end{cases}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\ dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $a\left(x\frac{dy}{dx} + 2y \right) = x - \frac{dy}{dx}$ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ. 4

38. a) ಒಂದು ಶಂಕುವಾಕೃತಿಯ ಫಿಲ್ಟರ್ ಕಾಗದದ ಎತ್ತರ 50 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 30 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುತ್ತದೆ. ಅದರೊಳಗೆ ನೀರನ್ನು ಹರಿಸಿದಾಗ ಅದರೊಳಗಿನ ನೀರಿನ ಎತ್ತರ $\frac{25}{27\pi}$ ಸೆಂ.ಮೀ./ಸಿ. ದರದಲ್ಲಿ ಏರುತ್ತದೆ. ನೀರಿನ ಎತ್ತರವು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ

i) ನೀರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯದ ದರದ ಏರಿಕೆ

ii) ನೀರಿನ ಘನಫಲದ ದರದ ಏರಿಕೆ ಮತ್ತು

iii) ನೀರಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಹೆಚ್ಚುವ ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\left(2 - \sqrt{3} \right) \cos \theta + \sin \theta = 1$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

ವಿಭಾಗ – E

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $1 \times 10 = 10$

39. a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ ಮತ್ತು $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 7$ ಇದ್ದಾಗ, $\vec{a}$ ಮತ್ತು $\vec{b}$ ಸದಿಶಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 46 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

c) $\int_0^1 x(1-x)^n \, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

40. a) ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು a ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಲೇಖಿಸಿದೆ. ಆಯತದ ಎರಡು ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲಿವೆ. ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುವಂತೆ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

b) 3^{200} ನ ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು $5x \equiv 4 \pmod{13}$ ಸಮಶೇಷೀಯತೆಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

c) $(a+b)(a+b\omega)\left(a+b\omega^2\right) = a^3 + b^3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. $1, \omega, \omega^2$ ಗಳು ಏಕಕದ ಘನಮೂಲಗಳು. 2

(English Version)

Instructions : i) The question paper has *five* **Parts – A, B, C, D** and **E**. Answer all the parts.

ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks, **Part – C** carries 40 marks, **Part – D** carries 20 marks and **Part – E** carries 10 marks.

PART – A

Answer *all* the *ten* questions : $10 \times 1 = 10$

1. State division algorithm.

2. Evaluate : $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ where ω is an imaginary cube root of unity.

3. Define a semigroup.

4. If the position vectors of the points A and B are $2i - j - k$ and $4i - 5j - 7k$, then find the position vector of the mid-point of AB.

5. Find the radius of the circle $x^2 + y^2 - 2x \cos\theta - 2y \sin\theta - 3 = 0$.

6. If e_1 is the eccentricity of the hyperbola $x^2 - y^2 = 4$ and e_2 is the eccentricity of its conjugate hyperbola then find e_2.

7. Evaluate : $\sin^{-1}(\sin 100^\circ) + \cos^{-1}(\cos 100^\circ)$.

8. Find the amplitude of the complex number $(1 + \cos\theta + i\sin\theta)$.

9. If $f(x) = e^{2\log(\sin x)}$ then find $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

10. Evaluate : $\int_0^1 xe^x \, dx$.

PART – B

Answer any *ten* questions : $10 \times 2 = 20$

11. If $a \equiv b \pmod{m}$ and $n > 1$ is a positive-divisor of m then prove that $a \equiv b \pmod{n}$.

12. For the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ verify that $A \cdot adj\, A = |A| \cdot I$.

13. If the Binary operation $*$ is defined on I as $a * b = a + b + ab$, $\forall\, a, b \in I$, then prove that $*$ is associative in I.

14. Write the trivial sub-groups of the group $G = \{1, 2, 3, 4\}$ under multiplication modulo 5 and examine whether $H_1 = \{1, 2\}$ is a sub-group of G.

15. If the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ touches the x-axis, then prove that $c = g^2$ and examine whether the circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ touches the x-axis.

16. Prove that

$$\sec^2\left(\tan^{-1} x\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\cot^{-1} x\right) = 2\left(1 + x^2\right).$$

17. Prove that $e^{1+\frac{i\pi}{6}} - e^{1-\frac{i\pi}{6}}$ is purely imaginary.

18. If the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are the adjacent sides of a rhombus, then find the value of $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) . \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$.

19. If $y = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, then prove that $\left(1 + x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$.

20. If $y = \tan^{-1}\left[\frac{ax - b}{bx + a}\right]$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$.

21. Evaluate : $\int e^x \left[\frac{1 + \sin x \cos x}{\cos^2 x}\right] dx$.

22. Form the differential equation of the family of straight lines passing through the origin.

PART – C

$3 \times 5 = 15$

I. Answer any *three* questions :

23. Find the G.C.D. of 408 and 1032 and express it in the form of $408x + 1032y$, $x, y \in I$ and prove that x and y are not unique. 5

24. Prove that

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + \Sigma a^2 .$$ 5

25. a) Prove that the set $G = \{1, 3, 7, 9\}$ forms a group under multiplication modulo 10. 3

b) In a group if every element is its own inverse then prove that it is Abelian. 2

26. a) For any vector $\vec{a}$, prove that

$$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}.$$ 3

b) If $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ represent the sides of a triangle ABC taken in order, then prove that $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, given that $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$. 2

II. Answer any *two* questions : $2 \times 5 = 10$

27. a) Derive the condition that the circles

$$x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0 \text{ and}$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0 \text{ cut each other orthogonally.}$$

3

b) If the length of the tangent from the point (k, 1) to the circle $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 3 = 0$ is $\sqrt{7}$, then find k. 2

28. a) Find the centre of the conic $3x^2 - 4y^2 - 6x + 8y = 13$ and also find the radius of the auxiliary circle. 3

b) Find k if $2y = 5x + k$ touches the parabola $y^2 = 6x$. 2

29. a) If $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$, then prove that

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2xyz.$$ 3

b) Find the general solution of $\tan \theta + \cot \theta = 2$. 2

III. Answer any *three* of the following questions : $3 \times 5 = 15$

30. a) Find the derivative of $\tan x$ w.r.t. x from the first principle. 3

b) Differentiate $(\sin hx)^{\cos hx}$ w.r.t. x. 2

31. a) If $y = e^{m\theta}$ and $x = \cos\theta$ then prove that

$$\left(1 - x^2\right) y_2 - xy_1 - m^2 y = 0.$$ 3

b) Prove that the curves $2y = x^3 + 5x$ and $y = x^3 + x + 1$ touch each other at $(1, 3)$. 2

32. a) Prove that the subnormal to the curve $x^2 y^2 = a^2\left(x^2 - a^2\right)$ is inversely proportional to the cube of the abscissa. 3

b) Evaluate : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$. 2

33. a) Integrate $\dfrac{1}{3\sin x + 4\cos x + 5}$ w.r.t. x. 3

b) Evaluate : $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{(1 - \sin x)(2 - \sin x)}$. 2

34. Find the area of the circle $x^2 + y^2 - 16 = 0$ by integration. 5

PART – D

Answer any *two* of the following questions : $2 \times 10 = 20$

35. a) Derive the equation of the ellipse in the form $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$. Also write the equation to the locus of the point of intersection of two perpendicular tangents to it. 6

b) State Cayley-Hamilton theorem and find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ by using the Cayley-Hamilton theorem. 4

36. a) If $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$ and $y + \frac{1}{y} = 2\cos\beta$, then prove that

$x = \text{cis}\,\alpha$ and taking $y = \text{cis}\,\beta$ prove the following :

i) $x^m y^{-n} + y^n x^{-m} = 2\cos(m\alpha - n\beta)$

ii) $x^m y^{-n} - y^n x^{-m} = 2i\sin(m\alpha - n\beta)$. 6

b) Find the equations of the parabolas given that the equation of the directrix is $x + 2 = 0$, axis is $y = 3$ and length of the latus rectum = 8. 4

37. a) Prove that

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx & \text{if } f(x) \text{ is even} \\ 0 & \text{if } f(x) \text{ is odd} \end{cases}$$

and hence find $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$. 6

b) Solve the differential equation $a\left(x\frac{dy}{dx} + 2y\right) = x - \frac{dy}{dx}$. 4

38. a) A filter paper is in the form of a right circular cone with its altitude 50 cm and radius of the base 30 cm. Water is being poured into it in such a way that the height of the water cone is increasing at the rate of $\frac{25}{27\pi}$ cm/sec. When the height of the water cone is 3 cm, find the rate at which

i) the radius of the water cone increases

ii) the volume of the water cone increases

iii) the area of the water surface increases. 6

b) Find the general solution of $\left(2 - \sqrt{3}\right)\cos\theta + \sin\theta = 1$. 4

PART – E

Answer any *one* of the following questions : $1 \times 10 = 10$

39. a) If $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ and $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 7$ then find the angle between the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$. 4

b) Find the length of the common chord of the circles

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0 \text{ and } x^2 + y^2 - 10x - 12y + 46 = 0.$$

4

c) Evaluate : $\int_0^1 x(1-x)^n \, dx$. 2

40. a) Find the dimensions of a rectangle of the greatest area that can be inscribed in a semicircle of radius a, given that two of its vertices are on the diameter. 4

b) Find the last digit of 3^{200} and find the solution of the linear congruence $5x \equiv 4 \pmod{13}$. 4

c) Prove that

$(a+b)(a+b\omega)\left(a+b\omega^2\right) = a^3 + b^3$ where $1, \omega, \omega^2$ are the cube roots of unity. 2